

Les vecteurs sont distingués par une flèche :  $\vec{X}$ ,  $X$  désignant la norme de  $\vec{X}$ . Dans tous les exercices, le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_T$ , dans lequel règne le champ de pesanteur  $\vec{g}$  sera, sauf mention explicite, considéré galiléen pour la durée des phénomènes décrits.

**Exercices d'application :** Dipôles en cascade, camion, évaluation du facteur de qualité, détermination expérimentale, sismographe.

**Culture en sciences physiques :** Circuit bouchon, camion, évaluation du facteur de qualité, sismographe, bleu du ciel.

**Corrigés en TD :** Dipôles en cascade, évaluation et détermination expérimentale, réponses d'un oscillateur, sismographe, bleu du ciel.

### Oscillations libres

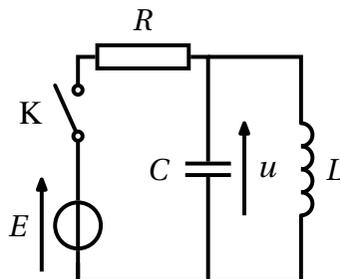
#### Exercice 1 : Oscillations des amortisseurs d'un camion

- Rappeler l'expression du facteur de qualité d'un oscillateur harmonique mécanique en fonction du coefficient de frottement visqueux  $\alpha$ , de la raideur  $k$  et de la masse  $m$ .
- Dans ce modèle, Un camion ayant passé un dos d'âne effectuera-t-il davantage d'oscillations selon qu'il est chargé ou vide? Ces oscillations seront-elles plus rapides selon qu'il sera chargé ou vide?
- Ces prévisions sont-elles en accord avec votre expérience? Montrer qu'on peut comprendre le phénomène en prenant en compte des linéarités dans les amortisseurs : la force n'est plus proportionnelle à l'élongation quand celle-ci devient plus élevée.

#### Exercice 2 : Circuit bouchon

On considère le circuit de la figure ci-dessous. L'interrupteur est ouvert depuis longtemps et le condensateur déchargé, quand on le ferme à un instant qu'on choisit comme origine des temps.

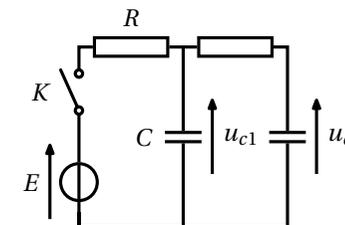
- Établir et résoudre, dans le cas d'un régime pseudopériodique amorti, l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u$ .
- On a  $C = 1 \mu\text{F}$  et  $L = 10 \text{ mH}$ . Déterminer la valeur de  $R$  pour avoir un facteur de qualité  $Q = 15$ . On se place dans ces conditions par la suite. Tracer l'allure de  $u(t)$ .
- Déterminer l'instant du 4<sup>e</sup> passage par  $u = E/Q^2$ . On pourra effectuer les approximations pertinentes pour  $Q \gg 1$ .
- Donner une approximation du maximum local de  $u(t)$  qui suit cet instant.



#### Exercice 3 : Deux dipôles RC en cascade

On considère le circuit de la figure ci-contre dans lequel les deux condensateurs sont identiques et initialement déchargés. Les deux résistors sont également identiques. On ferme l'interrupteur  $K$  à l'instant initial.

- Déterminer les valeurs aux temps longs de  $u_{c1}$  et  $u_{c2}$ , ainsi que les valeurs initiales de  $u_{c1}$ ,  $\frac{du_{c1}}{dt}$ ,  $u_{c2}$  et  $\frac{du_{c2}}{dt}$ .
- Établir en utilisant les lois de Kirchhoff les équations différentielles couplées (du 1<sup>er</sup> ordre) vérifiées par les tensions  $u_{c1}$  et  $u_{c2}$  aux bornes des condensateurs. En déduire l'équation différentielle couplée vérifiée par  $u_{c2}$ .
- En déduire l'expression de  $u_{c2}$ . Comment en déduirait-on celle de  $u_{c1}$ ?



#### Exercice 4 : Évaluation du facteur de qualité d'un oscillateur peu amorti

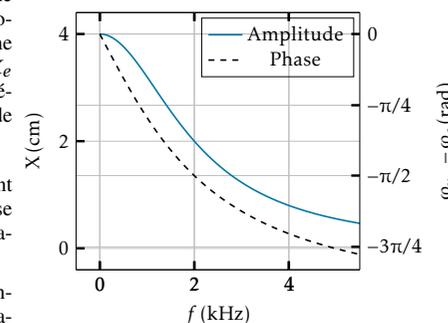
On considère un oscillateur harmonique très faiblement amorti par frottement visqueux.

- Rappeler l'expression générale de son élongation  $x$  en fonction du temps  $t$  pour une pseudo-période  $T$  et un facteur de qualité  $Q$ . On simplifiera l'expression de la pseudo-période pour  $Q \gg 1$ .
- On observe qu'après  $n$  oscillations de pseudo-période  $T$  voisine de  $T_0$ , l'amplitude du mouvement n'est plus que le dixième de l'amplitude initiale. Exprimer le facteur  $Q$  en fonction de  $n$ .
- Si vous disposez d'un verre de bonne qualité, faites-le résonner en faisant glisser sur son pourtour votre doigt préalablement humecté.
  - Quel est le phénomène oscillatoire à l'œuvre?
  - Déterminer un ordre de grandeur de son facteur de qualité en estimant la durée pendant laquelle vous l'entendez chanter après l'avoir excité.

### Oscillations forcées

#### Exercice 5 : Détermination des caractéristiques d'un oscillateur harmonique

- Établir les expressions des réponses (amplitude et phase) en élongation de l'oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux en régime sinusoïdal établi en fonction de l'amplitude  $X_e$  et la fréquence  $f$  de l'excitation, et de la fréquence propre  $f_0$  et du facteur de qualité  $Q$  de l'oscillateur harmonique.
- Comment déterminer expérimentalement la fréquence propre  $f_0$  en étudiant la phase de l'élongation en régime sinusoïdal établi?
  - Comment ensuite déterminer expérimentalement le facteur de qualité de l'oscillateur en étudiant l'amplitude de l'élongation?



3. Déterminer la fréquence propre et le facteur de qualité correspondant aux courbes ci-contre. Y a-t-il résonance ?

### Exercice 6 : Portrait de phase des oscillations forcées

On considère un oscillateur harmonique unidimensionnel amorti par frottement visqueux et soumis à une force extérieure  $F = F_0 \cos(\omega t)$ . On notera  $\omega_0$  sa pulsation propre et  $Q$  son facteur de qualité.

Tracer le portrait de phase des oscillations forcées dans le plan  $(x, v/\omega_0)$  en distinguant les cas  $\omega < \omega_0$ ,  $\omega = \omega_0$  et  $\omega > \omega_0$ . Que vous inspire celui du cas  $\omega = \omega_0$  ?

### Exercice 7 : Bande passante de la réponse en vitesse

On soumet un oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux à une excitation sinusoïdale. L'équation différentielle du mouvement est donc :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 Y_m \cos \omega t$$

On s'intéresse à sa réponse en vitesse.

- On désigne par  $V(\omega)$  l'amplitude des oscillations de la vitesse en régime sinusoïdal permanent.
  - Déterminer l'expression du maximum  $V_r$  de  $V(\omega)$ .
  - On nomme *bande passante* (à  $-3dB$ ) la bande de fréquences  $\Delta f = f_2 - f_1$  à l'intérieur de laquelle l'amplitude de la vitesse  $V(\omega)$  est supérieure à  $V_r/\sqrt{2}$ . Calculer  $\Delta f$ .
- Donner l'expression de la force excitatrice et de la force de frottement visqueux en fonction de la masse  $m$ , de  $Y_m$ ,  $X_m$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  et  $Q$ .
  - Calculer, pour toute valeur de  $\omega$ , le travail de la force de frottement et celui de la force excitatrice sur une période  $\omega$ .

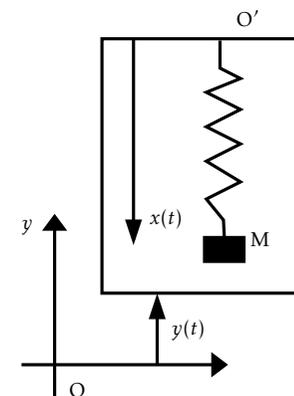
### Exercice 8 : Réponse d'un oscillateur à différents types de déplacements

Une masse  $m$  est suspendue à l'extrémité  $M$  d'un ressort vertical de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ . L'autre extrémité se trouve en  $A$ . Le système étant en équilibre et au repos, on impose à l'extrémité  $A$  un déplacement vertical  $z_A(t)$  à partir de sa position initiale. On néglige tout frottement.

- La position de  $M$  est repérée par son élongation  $Z(t)$  à partir de sa position d'équilibre. Établir l'équation différentielle canonique vérifiée par  $Z(t)$ .
- Étudier la réponse en élongation  $Z(t)$  de l'oscillateur dans les cas suivants :
  - échelon de déplacement :  $z_A(t) = z_0 H(t)$  avec  $z_0 > 0$ ,  $H(t < 0) = 0$  et  $H(t \geq 0) = 1$ ,
  - rampe de déplacement :  $z_A(t > 0) = z_0 t/\tau$ , avec  $\tau > 0$ ,
  - $z_A(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ z_0 t/\tau & \text{pour } 0 \leq t \leq \tau \\ z_0 & \text{pour } t > \tau \end{cases}$
- Montrer que cette dernière excitation permet de modéliser un échelon réel, de durée non nulle.

### Exercice 9 : Sismographe

Un sismographe est constitué d'une masse  $m$  suspendue à un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ . L'extrémité  $O'$  de cet oscillateur est solidaire d'un bâti subissant, par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_0$  un mouvement vertical représenté par la fonction  $y(t)$ . La masse  $m$  subit de plus une force de frottement visqueux  $\vec{f} = -\lambda \dot{x} \vec{e}_x$ . En l'absence de mouvement du bâti, ( $y = 0$ ), la position d'équilibre de  $M$  est repérée par  $x = x_0$ . On suppose que le bâti effectue dans  $\mathcal{R}_0$  des oscillations sinusoïdales de pulsation  $\omega$  :  $y(t) = Y_m \cos(\omega t)$ .



- On pose  $X = x - x_0$  avec  $x_0$ , l'écart de la masse par rapport à sa position d'équilibre. Déterminer, quand le régime permanent sinusoïdal est établi, l'amplitude  $X_m$  en  $X$  des oscillations de la masse  $m$  par rapport au bâti ainsi que le déphasage  $\varphi$  de ces mêmes oscillations par rapport à celles du bâti. On introduira la pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  du système, son facteur de qualité  $Q$  et on posera  $u = \omega/\omega_0$ .

- Tracer les courbes donnant  $X_m/Y_m$  et  $\varphi$  en fonction de la variable réduite  $u = \omega/\omega_0$ .
- On souhaite utiliser un tel dispositif comme sismographe, ie on souhaite que  $x(t)$  représente aussi fidèlement que possible les déplacements verticaux de la croûte terrestre. Comment choisir la valeur de  $Q$  pour garantir que  $X_m$  se confonde à 2% près avec  $Y_m$  sur un domaine de fréquence aussi grand que possible ? Déterminer cet intervalle de fréquences.

### Exercice 10 : Le bleu du ciel

Pour décrire les interactions entre une onde lumineuse caractérisée par le vecteur champ électrique  $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos \omega t$  et les électrons de la couche externe d'un atome, on utilise le modèle de l'électron élastiquement lié dû à Thomson.

- En admettant que la force due au champ électrique subie par une particule de charge  $q$  vaut  $\vec{F}_e = q\vec{E}$ , que l'électron est rappelé vers le centre  $O$  de l'atome par une force  $\vec{f} = -k\vec{OM}$  et qu'il est freiné par une force proportionnelle à sa vitesse  $\vec{f}_r = -h\vec{v}$ , établir l'équation différentielle régissant son mouvement. On utilisera le facteur de qualité  $Q$  et la pulsation propre  $\omega_0$  de l'oscillateur harmonique ainsi constitué.
- Démontrer qu'en régime permanent, l'électron oscille parallèlement à  $\vec{E}_0$ . On notera  $x$  son élongation.
- On s'intéresse à la réponse en accélération  $\ddot{x}$  de l'électron. Établir l'expression de l'accélération complexe.
- Cet atome est éclairé par de la lumière blanche composée d'ondes dont les pulsations sont comprises entre  $\omega_1$  (rouge) et  $\omega_2$  (violet). Sachant que  $\omega_2$  est très petit devant  $\omega_0$  et que  $Q \gg 1$ , montrer que dans ces conditions l'accélération est proportionnelle à  $\omega^2$ .
- En admettant qu'une charge oscillant à une fréquence  $\omega$  rayonne une onde lumineuse de fréquence  $\omega$  dont la puissance  $\mathcal{P}$  lumineuse est proportionnelle au carré de l'accélération, expliquer pourquoi le ciel paraît bleu.

## Correction de l'exercice 1

- On a  $\alpha/m = \omega_0/Q$  avec  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , soit  $Q = \sqrt{mk}/\alpha$ .
- On modélise les amortisseurs du camion par des oscillateurs harmoniques amortis par frottement visqueux. On peut modéliser le passage du dos d'âne comme une série de deux échelons croissant et décroissant : il excitera des oscillations dont l'amortissement sera d'autant plus lent (plus précisément la perte d'énergie par oscillation sera d'autant plus faible) que le facteur de qualité sera élevé.

Comme  $\omega \propto 1/\sqrt{m}$ , les oscillations seront plus rapides pour le camion à vide, plus léger. En revanche, le facteur de qualité sera plus faible puisque  $Q \propto \sqrt{m}$ . La diminution relative d'énergie par oscillation devrait donc être plus élevée et le camion devrait effectuer moins d'oscillations.

- C'est plutôt l'effet inverse qu'on observe : un camion à vide oscille davantage que quand il est chargé. On peut proposer l'interprétation suivante. Quand le camion est chargé, les ressorts sont en permanence plus comprimés (la compression au repos vérifie  $k\Delta l = mg$ ). Si les oscillations sont non linéaires, la norme de la force de rappel sera alors différente de  $kx$ . Pour expliquer la plus faible valeur du facteur de qualité pour  $m$  élevée, on peut supposer que la force aux grandes compressions est plus faible que dans le modèle harmonique. On adapte alors le modèle canonique en introduisant une constante de raideur « effective »  $k_{\text{eff}}$  inférieure à sa valeur  $k$  aux faibles compressions. Pour le camion chargé, on aura alors  $Q_{\text{eff}} = \sqrt{k_{\text{eff}}m/\alpha}$  qui pourra être inférieur à  $\sqrt{km}/\alpha$  si toutefois le produit  $k_{\text{eff}}m$  décroît alors que  $m$  croît. Il faut pour cela que  $k_{\text{eff}}$  décroisse plus vite que  $1/\Delta l$  quand la compression  $\Delta l$  croît puisque la valeur moyenne de  $\Delta l$  croît linéairement avec  $m$ .

## Correction de l'exercice 2

- Une transformation Thévenin-Norton donne un générateur de courant électromoteur  $E/R$  alimentant l'association parallèle  $R//L//C$ . La loi des nœuds donne alors :

$$\frac{E}{R} = \frac{u}{R} + i_L + C \frac{du}{dt} \rightarrow 0 = \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{u}{LC} + \frac{d^2u}{dt^2}.$$

On reconnaît un oscillateur harmonique amorti de pulsation propre  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et de facteur de qualité  $Q = RC\omega_0$ , dont les solutions sont :

$$u = 0 + e^{-\omega_0 t/(2Q)} (U_1 \cos(\omega t) + U_2 \sin(\omega t)), \quad \text{avec } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(4Q^2)}.$$

On détermine les conditions initiales avec le régime asymptotique pour  $K$  ouvert : on a alors un circuit  $LC$ . Si le condensateur est déchargé on a  $u = 0 = \text{cste}$ , le courant dans la bobine est donc lui aussi nul. Leur continuité assure que, quand on ferme  $K$  :

- $u(0) = 0$
- $E = u_R(0) + u(0) = u_R(0)$ . Le courant dans le résistor est donc  $u_R/R = E/R$  et c'est aussi celui dans le condensateur puisque  $i_L(0) = 0$ . On a donc :  $i_C(0) = C \frac{du}{dt}$ , soit  $\frac{du}{dt} = E/(RC)$ .

On a finalement  $X_1 = 0$  et  $X_2 = E/(RC\omega)$ , soit après simplifications :

$$u = \frac{E}{Q \sqrt{1 - 1/(4Q^2)}} e^{-\omega_0 t/(2Q)} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1 - 1/(4Q^2)} t\right).$$

- On calcule  $\omega_0 = 1,0 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  (soit  $f_0 = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}$ ) et  $R = Q/(C\omega_0) = 1,5 \text{ k}\Omega$ .  
On obtient alors la courbe ci-contre.

- La tension étant initialement nulle et croissante (d'après les conditions initiales), le quatrième passage par  $u = E > 0$  se situe dans la troisième pseudo-demi-période comme on le voit sur la figure. On doit chercher  $t_4$  tel que :

$$\frac{1}{Q^2} = \frac{1}{Q \sqrt{1 - 1/(4Q^2)}} e^{-\omega_0 t_4/(2Q)} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1 - 1/(4Q^2)} t_4\right)$$

avec :  $t \in [2\pi/\omega; 3\pi/\omega]$ .

On peut résoudre cette équation numériquement. On peut également utiliser le fait que  $Q$  est assez grand pour effectuer certaines simplifications :

- L'amplitude des oscillations est encore assez grande devant  $E$  et donc  $t_4$  sera proche de  $3\pi/\omega$ , par valeurs négative,
- On peut négliger  $1/(4Q^2)$  devant 1,
- L'exponentielle varie lentement et on peut donc l'approximer par sa valeur en  $3\pi/\omega_0$  :  $e^{-3\pi/(2Q)}$ .

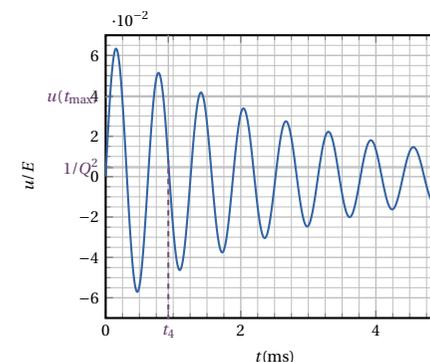
On calcule finalement :

$$1 = Q e^{-3\pi/(2Q)} \sin(\omega_0 t_4) \rightarrow \sin(\omega_0 t_4) = \frac{e^{3\pi/(2Q)}}{Q} = 4,9 \cdot 10^{-2} \ll 1 \quad \text{soit : } 3\pi - \omega_0 t_4 = \arcsin\left(\frac{e^{3\pi/(2Q)}}{Q}\right) \approx \frac{e^{3\pi/(2Q)}}{Q}$$

$$t_4 = \frac{3\pi}{\omega_0} - \frac{e^{3\pi/(2Q)}}{Q\omega_0} = 9,3 \cdot 10^{-4} \text{ s}.$$

- Comme  $Q \gg 1$ , on peut considérer que les maximums de  $u(t)$  sont pratiquement confondus avec ceux de  $\sin(\omega t) \approx \sin(\omega_0 t)$ . Celui qui suit  $t_4$  est donc atteint en  $t_{\text{max}} \approx 5\pi/\omega_0$  et vaut approximativement :

$$\frac{u(t_{\text{max}})}{E} \approx \frac{e^{-\omega_0 t_{\text{max}}/(2Q)}}{Q \sqrt{1 - 1/(4Q^2)}} \approx \frac{e^{-5\pi/(2Q)}}{Q} \approx 4 \cdot 10^{-2}.$$



## Correction de l'exercice 3

- Aux temps longs, les deux condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts. On en déduit que les courants traversant les résistors sont nuls, la tension à leurs bornes également. On conclut que  $u_{c1}(\infty) = u_{c2}(\infty) = E$ .

La continuité de la tension aux bornes des condensateurs assure que  $u_{c1}(0) = u_{c2}(0) = 0$ . La tension aux bornes du résistor en série avec le condensateur 2 est donc nulle, tout comme le courant qui la traverse et on a donc  $\frac{du_{c2}}{dt}(0) = 0$ .

En revanche la loi des mailles assure que la tension aux bornes de l'autre résistor vaut alors  $E$ , le courant qui la traverse est donc  $E/R$  dont on déduit :  $\frac{du_{c1}}{dt}(0) = E/(RC)$ .

2. La loi des mailles dans la deuxième maille ( $C_1 - R - C_2$ ) s'écrit :

$$u_{c1} = u_{c2} + RC \frac{du_{c2}}{dt} \quad (1)$$

3. Dans la maille  $E - R - C_1$ , en utilisant la loi des nœuds au nœud entre les deux résistors, on a :

$$E = u_{c1} + RC \left( \frac{du_{c1}}{dt} + \frac{du_{c2}}{dt} \right).$$

On injecte ensuite l'expression (1) dans les termes en  $u_{c1}$  de (3). On obtient :

$$E = u_{c2} + 3RC \frac{du_{c2}}{dt} + (RC)^2 \frac{d^2 u_{c2}}{dt^2} \rightarrow \frac{E}{(RC)^2} = \frac{d^2 u_{c2}}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{du_{c2}}{dt} + \frac{u_{c2}}{(RC)^2},$$

sous la forme canonique avec  $\omega_0 = 1/(RC)$  et  $Q = 1/3$ .

4. On aura un régime aperiodique. Les racines du polynôme caractéristique sont :

$$-\gamma_1 = \frac{1}{2RC} (3 + \sqrt{5}) \quad -\gamma_2 = \frac{1}{2RC} (3 - \sqrt{5}).$$

Les solutions sont de la forme :

$$u_{c2} = E + \alpha_1 e^{-\gamma_1 t} + \alpha_2 e^{-\gamma_2 t}.$$

Les conditions initiales imposent :

$$u_{c2} = 0 = E + \alpha_1 + \alpha_2 \quad \frac{du_{c2}}{dt} = 0 = -\gamma_1 \alpha_1 - \gamma_2 \alpha_2$$

La résolution de ce système 2x2 (éventuellement avec l'aide du module `sympy` de `python`) donne :

$$\alpha_1 = \frac{E}{2} \left( \frac{3}{\sqrt{5}} - 1 \right) \quad \alpha_2 = -\frac{E}{2} \left( \frac{3}{\sqrt{5}} + 1 \right)$$

### Correction de l'exercice 4

- On a  $x(t) = \exp(-\omega_0 t / (2Q)) (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$ , avec  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2} \approx \omega_0$  pour  $Q \gg 1$ .
- Comparons ces expressions à un instant  $t$  et à l'instant  $t + T$ . Avec la pseudo-période  $T = 2\pi/\omega$ , on a  $x(t + T) = e^{-\omega T / (2Q)} x(t) \approx e^{\pi/Q}$  car  $\omega \approx \omega_0$ . On a donc :  $e^{-n\pi/Q} = 1/10$  soit  $Q = n\pi / \ln(10) \approx 1,36n$ .
- (a) On observe une oscillation mécanique des parois du verre, à l'origine du son.  
(b) La fréquence sera de l'ordre de kHz et la durée  $\tau$  du chant de l'ordre de la seconde, soit  $Q \approx \tau \omega_0 = 2\pi\tau / T_0 \approx 10^4$ . On n'a ici qu'une grossière approximation : une mesure quantitative de la décroissance temporelle serait nécessaire pour déterminer  $Q$  précisément.

### Correction de l'exercice 5

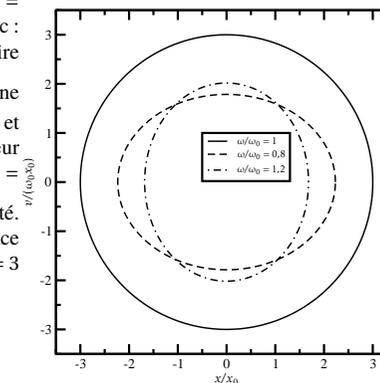
1. En notant  $X$  l'amplitude de l'élongation en régime sinusoïdal établi et  $\varphi$  sa phase, on a :

$$X = \frac{X_e}{\sqrt{\left(1 - \frac{f^2}{f_0^2}\right)^2 + \left(\frac{f}{f_0 Q}\right)^2}} \quad \varphi = -\arg\left(1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + j \frac{f}{f_0 Q}\right).$$

- (a) On constate que, pour  $f = f_0$ ,  $\varphi = -\arg(j/Q) = -\pi/2$ . La réponse en élongation sera donc en quadrature pour  $f = f_0$ .  
(b) Pour  $f = f_0$ , on a  $X = QX_e$ . Le facteur de qualité est alors le rapport de l'amplitude de l'oscillateur sur celle de l'excitation.
- On lit  $\varphi = -\pi/2$  pour  $f = f_0 = 2 \text{ kHz}$  et pour cette fréquence  $X = 2 \text{ cm}$ . On lit l'amplitude de l'excitation,  $X_e = 4 \text{ cm}$  en  $f = 0$ . On en déduit  $Q = \frac{2}{4} = 0,5$ .

### Correction de l'exercice 6

- On sait que la réponse en élongation est, dans le régime forcé :  $x(t) = X(\omega) \cos(\omega t + \varphi_\omega)$ . On a alors  $\dot{x}(t) = -\omega X(\omega) \sin(\omega t + \varphi_\omega)$  et donc :  $v/\omega_0 = -\frac{\omega}{\omega_0} X(\omega) \sin(\omega t + \varphi_\omega)$ . Dans le plan  $(x, v/\omega_0)$  la trajectoire vérifie donc :  $x^2 + \left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2 = X(\omega)^2$ . On reconnaît celle d'une ellipse. Le grand axe est selon l'axe des positions pour  $\omega \leq \omega_0$  et selon celui des  $v/\omega_0$  pour  $\omega \geq \omega_0$ . Par ailleurs, on connaît la valeur de l'amplitude  $X(\omega)$  qui s'exprime, en posant  $F_0 = m\omega_0^2 x_0^2$ ,  $X(u) = x_0 Q / \sqrt{u^2 + Q^2(1 - u^2)^2}$  avec  $u = \omega/\omega_0$  et  $Q$  le facteur de qualité. On a représenté sur la figure ci-contre les trajectoires dans l'espace des phases d'un oscillateur harmonique de facteur de qualité  $Q = 3$  pour  $\omega = 0,8 \omega_0$ ,  $\omega = \omega_0$  et  $\omega = 1,2 \omega_0$ .



- Le cas  $\omega = \omega_0$  redonne exactement la trajectoire d'un oscillateur harmonique non amorti et non excité. En effet la force excitatrice compense ici à chaque instant la force de frottement visqueux (le déphasage de la vitesse par rapport à l'excitation est nul à résonance).

Dans les autres cas ( $\omega \neq \omega_0$ ) ce n'est qu'en moyenne sur une période (et pas à chaque instant) que l'énergie apportée par la force excitatrice compense celle dissipée par la force de frottement.

### Correction de l'exercice 7

- (a) Comme vu en cours, l'amplitude  $V(\omega)$  des oscillations, en régime sinusoïdal permanent, de la vitesse d'un oscillateur harmonique amorti excité par la force  $m\omega_0^2 Y_m \cos \omega t$  se met sous la forme  $\frac{V_m}{1 + jQ(u - 1/u)}$ , avec  $u = \omega/\omega_0$ .

- (b) Sa valeur à résonance (en  $u = 1$ ) vaut  $V_r = \omega_0 Y_m Q$  et on a donc  $V = V_r / \sqrt{2}$  pour  $Q^2(u-1/u)^2 = 1$ . Les solutions  $u_{1-2}$  sont, en ne gardant que les solutions positives :  $u_{1-2} = \pm \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2Q} \sqrt{1+4Q^2}$ . Finalement, on obtient  $\Delta f = f_2 - f_1 = f_0(u_2 - u_1) = f_0/Q$ .

2. (a) On réécrit l'équation différentielle sous la forme de la loi de la quantité de mouvement :

$$m\ddot{X} = m\omega_0^2 Y_m \cos(\omega t) - m\omega_0^2 X - \frac{m\omega_0}{Q} \dot{X}.$$

La force excitatrice est  $F_e \equiv m\omega_0^2 Y_m \cos(\omega t)$  et la force de frottement est  $F_f \equiv -\frac{m\omega_0}{Q} \dot{X}$ , soit, en notation complexe :

$$\underline{F}_f = -\frac{m\omega_0}{Q} \underline{V}_m.$$

- (b) On exprime la puissance instantanée  $\mathcal{P}(F_e)$ , en utilisant les expressions réelles de la force et de la vitesse :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(F_e) &= F_e \cos(\omega t) \dot{X} = F_e \cos(\omega t) \operatorname{Re} \left( \underline{V}_m e^{j\omega t} \right) = F_e \cos(\omega t) \operatorname{Re} \left( \frac{\omega_0 Y_m Q e^{j\omega t}}{1 + jQ(u-1/u)} \right) \\ &= F_e \omega_0 Y_m Q \cos(\omega t) \operatorname{Re} \left( \frac{e^{j\omega t}}{1 + jQ(u-1/u)} \right). \end{aligned}$$

En posant

$$1 + jQ(u-1/u) = \sqrt{1+Q^2(u-1/u)^2} e^{j\varphi},$$

on a

$$\operatorname{Re} \left( \frac{e^{j\omega t}}{1 + jQ(u-1/u)} \right) = \frac{\operatorname{Re} \left( e^{j(\omega t - \varphi)} \right)}{\sqrt{1+Q^2(u-1/u)^2}} = \frac{\cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{1+Q^2(u-1/u)^2}}.$$

On peut alors réécrire :

1

$$\mathcal{P}(F_e) = \frac{m\omega_0^3 Y_m^2 Q}{\sqrt{1+Q^2(u-1/u)^2}} \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) = \frac{m\omega_0^3 Y_m^2 Q}{2\sqrt{1+Q^2(u-1/u)^2}} (\cos(\omega t - \varphi/2) + \cos(\varphi)).$$

Le travail total sur une période est alors :

$$\begin{aligned} W(F_e) &= \int_{t=0}^T \mathcal{P}(F_e) dt = \frac{m\omega_0^3 Y_m^2 Q}{2\sqrt{1+Q^2(u-1/u)^2}} \int_{t=0}^T (\cos(\omega t - \varphi/2) + \cos(\varphi)) dt \\ &= \frac{\pi m\omega_0^3 Y_m^2 Q/\omega}{\sqrt{1+Q^2(u-1/u)^2}} \cos(\varphi) = \frac{m\omega_0^3 Y_m^2 Q/\omega}{1+Q^2(u-1/u)^2} = \frac{m\omega_0^2 Y_m^2 Q}{u(1+Q^2(u-1/u)^2)}, \end{aligned}$$

puisque  $T = 2\pi/\omega$  et  $\cos(\varphi) = 1/\sqrt{1+Q^2(u-1/u)^2}$ . Remarquons en particulier qu'il est positif.

On peut enfin reprendre le même type de calcul pour le travail de la force de frottement  $\vec{F}_f$ , en intégrant sur une période sa puissance comme précédemment. Il sera nécessairement opposé au travail de la force

excitatrice, et donc en particulier négatif. En effet cette dernière doit exactement le compenser sur chaque période pour que les oscillations soient périodiques. On vérifie ce résultat en montrant (en multipliant le PFD par la vitesse) qu'à chaque instant la somme des puissances des trois forces est égale à la dérivée temporelle de l'énergie cinétique. L'intégrale sur une période donne alors :

$$\Delta \mathcal{E}_m + \Delta \mathcal{E}_c = W(F_f) + W(F_e).$$

Comme les évolutions des énergies mécanique et cinétique sont périodiques, leurs variations sur une période sont nulles et on obtient bien :

$$W(F_f) + W(F_e) = 0.$$

## Correction de l'exercice 8

1. En introduisant la pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . On obtient  $\ddot{Z} + \omega_0^2 Z = \omega_0^2 z_A(t)$ . Les solutions seront la somme d'une solution particulière et des sinusoides  $A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ .  $A$  et  $B$  seront déterminées par la continuité de la position et de la vitesse à l'instant initial qui imposent  $Z(0) = 0$  et  $\dot{Z} = 0$ .

2. (a) Une solution particulière est  $Z = z_0$ . Les conditions initiales exigent :  $A + z_0 = 0$  et  $\omega_0 B = 0$ , soit  $Z(t) = z_0(1 - \cos \omega_0 t)$ .

- (b) Une solution particulière est  $Z = z_0 t/\tau$  puisque  $\frac{d^2 z_0 t/\tau}{dt^2} = 0$ . Les conditions initiales exigent maintenant  $A = 0$  et  $\omega_0 B + z_0/\tau = 0$ , soit  $Z_{ramp}(t) = z_0 \left( \frac{t}{\tau} - \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 \tau} \right)$ .

- (c) La fonction proposée est définie par morceaux. Les solutions sur chaque intervalle seront :

$$\begin{cases} t \in [0, \tau] & : z_0 t/\tau + \frac{z_0}{\omega_0 \tau} (\omega_0 t - \sin \omega_0 t) \\ t > \tau & : z = z_0 + A' \cos \omega_0 t + B' \sin \omega_0 t \end{cases}.$$

On doit maintenant assurer également la continuité de  $Z$  et  $\dot{Z}$  en  $t = \tau$ , soit

$$\begin{cases} (1) Z_{ramp}(\tau) = z_0 \left( 1 - \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau} \right) = z_0 + A' \cos \omega_0 \tau + B' \sin \omega_0 \tau \\ (2) \dot{Z}_{ramp}(\tau) = \frac{z_0}{\tau} (1 - \cos \omega_0 \tau) = -\omega_0 A' \sin \omega_0 \tau + \omega_0 B' \cos \omega_0 \tau \end{cases}.$$

Les combinaisons linéaires  $\sin \omega_0 \tau (1) + \cos \omega_0 \tau / \omega_0 (2)$  et  $\cos \omega_0 \tau (1) - \sin \omega_0 \tau / \omega_0 (2)$  déterminent respectivement  $B'/z_0 = (\cos \omega_0 \tau - 1)/(\omega_0 \tau)$  et  $A'/z_0 = -\sin \omega_0 \tau / (\omega_0 \tau)$ , soit :

$$\frac{Z}{z_0} = 1 + \left( \frac{\cos \omega_0 \tau - 1}{\omega_0 \tau} \right) \sin \omega_0 t - \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau} \cos \omega_0 t.$$

3. On retrouve le cas de l'échelon puisque  $\lim_{\omega_0 \tau \rightarrow 0} \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau} = 1$  et  $\lim_{\omega_0 \tau \rightarrow 0} 1 - \frac{\cos \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau} = 0$ .

## Correction de l'exercice 9

1. La masse est soumise à son poids  $\vec{P} = m \vec{g}$ , à la tension du ressort  $\vec{T} = -k(\overrightarrow{O'M} - l_0 \vec{e}_x)$  et à la force de frottement visqueux  $\vec{f} = -\lambda \dot{x} \vec{e}_x$ . Dans  $\mathcal{R}_0$  galiléen, on a alors :  $m \frac{d^2 \overrightarrow{O'M}}{dt^2} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}$ . On s'intéresse ici à l'évolution de  $\overrightarrow{O'M}$ , position par rapport au bâti. L'équation précédente s'écrit alors :  $m \frac{d^2 \overrightarrow{O'M}}{dt^2} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f} - m \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2}$ , soit, en utilisant les coordonnées définies dans l'énoncé :  $m\ddot{x} = mg - k(x - l_0) - \lambda \dot{x} + m\ddot{y}$ . On utilise, selon la procédure habituelle la variable  $X = x - x_0$  qui permet de faire disparaître le poids et  $kl_0$  de l'équation pour obtenir :

$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = -\omega^2 Y_m \cos(\omega t),$$

en utilisant l'expression donnée pour  $y(t)$ .

Pour chercher le régime établi dans lequel  $X = X_m \cos(\omega t + \varphi)$  à l'aide de la variable complexe  $\underline{X} = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ , on résout :  $X_m e^{j\varphi} (-\omega^2 + j\omega\omega_0/Q + \omega_0^2) = -\omega^2 Y_m$ , soit<sup>i</sup>

$$X_m e^{j\varphi} = -\frac{u^2}{1 - u^2 + ju/Q} \quad \text{et donc : } X_m = u^2 / \sqrt{(1 - u^2)^2 + u^2/Q^2}$$

$$\varphi = \pi - \arg \left[ j(u/Q + j(u^2 - 1)) \right] = \pi - \pi/2 + \arctan \left( \frac{Q(1 - u^2)}{u} \right) = \pi/2 + \arctan \left( \frac{Q(1 - u^2)}{u} \right).$$

2.  $X_m/Y_m$  varie de 0 en  $u = 0$  à  $1 + \infty$ . Il admet un maximum si  $(1/u^2 - 1)^2 + \frac{1}{Q^2 u^2}$  admet un minimum soit pour  $1/u^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$  ce qui n'est possible que pour  $Q \geq 1/\sqrt{2}$ . On n'a, comme dans le cas de l'oscillateur excité par une force sinusoïdale, résonance que pour  $Q \geq 1/\sqrt{2}$ . Cette résonance est, le cas échéant, atteinte en  $\omega_{\text{res}} = \omega_0 / \sqrt{1 - 1/(2Q^2)} \geq \omega_0$  ici mais tendant toujours vers  $\omega_0$  quand le facteur de qualité tend vers l'infini.  $\varphi$  varie quant à lui monotonement de  $\pi$  en  $u = 0$  à 0 pour  $u \rightarrow \infty$ .

Les courbes représentatives de  $X_m/Y_m$  et de  $\varphi$  sont données sur la figure 1 pour différentes valeurs de  $Q$ .

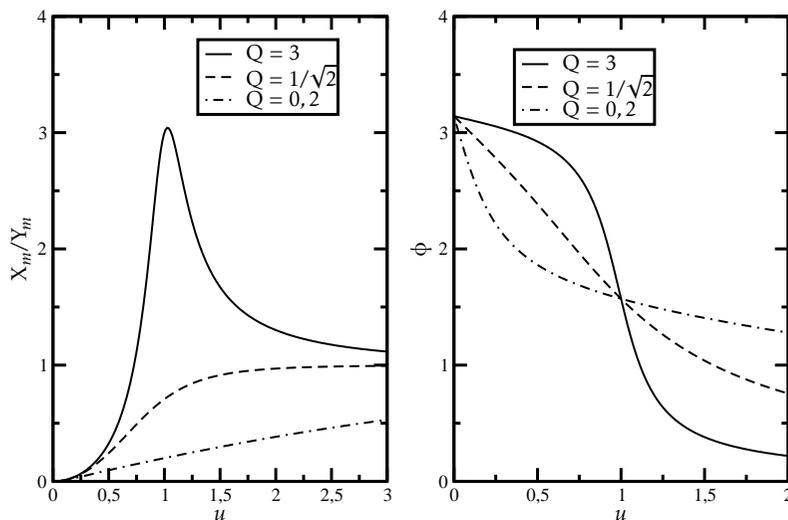


Fig. 1 : Réponse d'un sismographe pour différentes valeurs du facteur de qualité.

<sup>i</sup>Attention, en cours on a obtenu l'expression de  $\vec{OM}(t)$  pour un système similaire pour un point  $O'$  oscillant sinusoïdalement : le problème paraît similaire à celui traité ici. On pourrait être tenté d'obtenir  $\vec{O'M}$  en soustrayant  $\vec{OO'} = y(t) \vec{e}_y$  à l'expression du cours. On constate qu'on n'obtient pas le même résultat qu'ici car la force de frottement dans le cours était proportionnelle à la vitesse de la masse dans le référentiel galiléen alors qu'elle est ici proportionnelle à la vitesse dans le référentiel lié au bâti.

3. On pourra utiliser ce dispositif comme sismographe si  $X_m \approx Y_m$ . On veut avoir  $0,98 \leq X_m/Y_m \leq 1,02$  sur une bande de fréquences aussi large que possible. On obtient ce résultat en choisissant  $Q \geq 1/\sqrt{2}$  tel que le maximum de  $X_m/Y_m$ , qui vaut  $2Q^2/\sqrt{4Q^2 - 1}$  vaille exactement 1,02. On obtient  $Q \approx 0,789$ . Les valeurs de  $u$  pour lesquelles  $|X_m/Y_m| \leq 1,02$  s'étendent de  $u = u_{\text{min}}$  pour lequel  $X_m/Y_m = 0,98$  à l'infini. On obtient  $\omega_{\text{min}} = 1,44 \omega_0$ .

## Correction de l'exercice 10

1. Le frottement est visqueux et la force de rappel harmonique, on obtient l'équation du mouvement :

$$m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} + h \frac{d\vec{OM}}{dt} + k\vec{OM} = q\vec{E} \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\vec{OM}}{dt} + \omega_0^2 \vec{OM} = \omega_0^2 \vec{OM}_0 \cos(\omega t),$$

avec  $\omega_0^2 = k/m$ ,  $\omega_0/Q = h/m$  et  $\omega_0^2 \vec{OM}_0 = q\vec{E}_0/m$ .

2. Bien que le problème ne soit pas unidimensionnel comme dans le cas étudié en cours, on peut rechercher par la même technique le régime permanent grâce aux notations complexes en posant  $\vec{OM} = x(t) \vec{e}_x = \text{Re}(\underline{\vec{OM}})$  et en recherchant  $\underline{\vec{OM}}$  sous la forme  $\underline{\vec{OM}}(t) = \underline{X} \vec{e}_x e^{j\omega t}$ , où  $\vec{e}_x$  est un vecteur unitaire et  $\underline{X}$  une amplitude complexe.  $\underline{\vec{OM}}$  sera alors solution de l'équation avec  $(q\vec{E}_0/m)e^{j\omega t}$  comme second membre. On obtient alors :

$$(-\omega^2 + j\frac{\omega_0\omega}{Q} + \omega_0^2) \underline{X} \vec{e}_x e^{j\omega t} = \omega_0^2 \vec{OM}_0 e^{j\omega t} \quad \text{soit : } \underline{X} \vec{e}_x = \frac{\vec{OM}_0}{(1 - u^2) + ju/Q} \quad \text{avec } u = \omega/\omega_0.$$

On constate qu'en régime établi,  $\vec{OM}(t) = x \vec{e}_x$  avec  $\vec{e}_x$  colinéaire à  $\vec{OM}_0$  et donc à  $\vec{E}_0$ .

3. On obtient l'accélération complexe en dérivant  $\underline{\vec{OM}}(t)$ . On obtient après calculs :

$$\ddot{x}(t) = \frac{u^2 q E_0 / m}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + u^2 / Q^2}} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec } \varphi = \pi/2 - \arctan[Q(u - 1/u)].$$

4. On a  $\omega \ll \omega_0$ , soit  $u \ll 1$  et  $Q \gg 1$ , l'expression se simplifie en :  $\ddot{x}(t) = -(\omega^2 q E_0 / m \omega_0^2) \cos \omega t$  : l'accélération est proportionnelle à  $\omega^2$ .
5. L'électron est soumis à une excitation composée d'un grand nombre de longueurs d'onde. Sa réponse en accélération sera une vibration composée de la somme des réponses harmoniques à chacune des longueurs d'onde excitatrices, l'amplitude de chacune étant donnée par la relation de la question précédente. Il émet donc de la lumière dans toutes ces longueurs d'onde : c'est le phénomène de diffusion de la lumière.

Cependant, la puissance lumineuse émise varie comme le carré de l'accélération et donc en  $\omega^4$ . La puissance rayonnée dans le bleu ( $\lambda_{\text{bleu}} \approx 400 \text{ nm}$ ) est donc  $(\lambda_{\text{rouge}}/\lambda_{\text{bleu}})^4$  supérieure à celle rayonnée dans le rouge ( $\lambda_{\text{rouge}} \approx 700 \text{ nm}$ ), soit environ 9 fois plus importante. La lumière diffusée par les atomes de l'atmosphère est donc principalement bleue, et cette dernière nous apparaît alors bleue.